XXIII ОБЛАСТНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА В АВСТРИЯ

През октомври 1991 година Математическа гимназия „Баба Тонка“ в Русе получи покана от гимназия „Кеплер“ в Грац, Австрия четири ученици да участвуват в областната олимпиада по математика в Австрия на разноски на областта Щайермарк. Със съдействието на много спонсори и с микробуса на БРП — Русе на 4 май 1992 година нашата група, в която влизаше и г-жа А. Димова — учителка по немски, пристигна в Грац. В хотела бяха събрани 65 ученици от различни градове на областта и от една седмица водеха занимания по математика.

Олимпиадата се състоя на 5 май 1992 г. На 70-те участници (участвува и един ученик от Тимишоара, Румъния) бяха предложени четири задачи за четири часа. За всяка задача се предвиждаха най-много по 8 точки. Ето и самите задачи:

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа n, $k \geqq 0$ такива, че $n + k$ е просто число и $(2^{n-k} - 1)(2^n - 1)(2^{n+k} - 1) = N^3$, т. е. изразът е куб на естествено число $N \geqq 0$.

Задача 2. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} x+y^2=2, \\ x+y+z^2=15, \\ x+y+z+x^2=-10. \end{array}\right.$$

Задача 3. Дадена е редицата $\{a_n\}$, $a_1 \in \mathbb{N}$, $(a_n)^n = (a_{n-1})^{n-1}$ при $n > 1$. Докажете, че съществува $a_1 \in \mathbb{N}$ такова, че $a_k \in \mathbb{N}$ при $1 \leqq k \leqq 1992$, но $a_{1993} \notin \mathbb{N}$.

Задача 4. Точките X, Y и Z делят една окръжност на три дъги от 60°, 100° и 200°. Да се построят всички остроъгълни триъгълници ABC така, че една от точките X, Y и Z да бъде пресечна точка на височината през върха A с описаната около триъгълника окръжност (H_A), друга да бъде пресечната точка на височината през върха B с описаната окръжност (H_B) и третата — пресечна точка на ъглополовящата през върха C с описаната окръжност (W_C).

Решаването на задачите не е анонимно и всяка задача се пише на отделни листи. Това улеснява организацията на олимпиадата и четирите комисии от по трима проверяващи отделните задачи приключиха работа за 3–4 часа, след което съгласувахме оценките на българските ученици с председателите на комисиите.

На 6 май 1991 г. беше закриването и обявяването на резултатите. Първите 13 ученици от областта Шайермарк се допускат до последния кръг. Две седмици те ще бъдат на лагер–школа по математика заедно с другите допуснати участници и последните два дни се провежда последният (подборен) кръг на Австрийската олимпиада по математика. От него се определя отборът за участие в МОМ.

Ето и класирането на първите седем ученици:

			Точки по зад.				Общо
1.	Борислав Деянов	9. клас, МГ, Русе	8	0	8	7	23
2.	Юрген Гимпл	гимназия „Кеплер“	3	1	8	7	19
3.	Юлия Кемпе	гимназия „Лихтенфелс“	3	0	8	7	18
4.	Силвия Велкова	9. клас, МГ, Русе	4	0	7	7	18
5.	Роберт Бауер	гимназия „Кеплер“	0	2	8	7	17
6.	В. Димитров	10. клас, МГ, Русе	1	0	8	8	17
7.	Любомир Борисов	9. клас, МГ, Русе	1	0	8	6	15

Първите 17 ученици получиха диплом за първа награда, а **Борислав Деянов** отнесе за Русе купата за I-во място. Това е още един успех за русенската школа по математика и особено на колегите, подготвяли учениците — **Р. Раен**, асистент във ВТУ „А. Кънчев“ — 9. клас и **М. Тънмазов**, МГ „Баба Тонка“ — 10. клас.

Решение на задача 1. Най-напред ще отбележим някои тривиални решения:

а) $k = 0$, n — просто число. Тогава $N = 2^n - 1$.

б) $n = 0$, k — просто число. Тогава $N = 0$.

в) $n = k$, тогава $n + k = 2k$ и следователно $k = 1$, т. е. $n = k = 1$, а $N = 0$.

Ще покажем, че други решения няма.

Ако $0 < n < k$, лесно се вижда, че N^3 няма да е цяло. Тогава остава само случая $0 < k < n$. Ще използваме, че

$$(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{(a,b)} - 1,$$

откъдето получаваме

$$(2^{n+k} - 1, 2^n - 1) = 2^{(n+k,\, n)} - 1 = 1,$$

$$(2^{n+k} - 1, 2^{n-k} - 1) = 2^{(n+k,\, n-k)} - 1 = 1,$$

защото $n + k$ е просто. Следователно $2^{n+k} - 1$ няма общи делители с другите множители и трябва да съществува число y такова, че $2^{n+k} - 1 = y^3$ и $2^{n+k} = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1)$. Сега е очевидно, че $y^2 - y + 1$ е степен на числото 2, но това е възможно само ако $y = 0$ или $y = 1$. И в двата случая имаме $n + k = 0$ или $n + k = 1$, което не води до решения.

Пълен брой точки на тази задача има само **Борислав Деянов**.

Решение на задача 2. Умножаваме третото уравнение по 4 и събираме почленно трите уравнения, след което получаваме

$$6x + 5y + 4z + 4x^2 + z^2 + y^2 = -40 + 15 + 2 \iff$$

$$\iff 4x^2 + 6x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + 5y + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + z^2 + 4z + 4 - \frac{9}{4} - \frac{25}{4} - 4 = -23 \iff$$

$$\iff \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z+2)^2=-\frac{21}{2}.$$

Следователно системата няма решение. Никой от участниците не можа да реши тази задача.

Р е ш е н и е н а з а д а ч а 3. За да се реши задачата достатъчно е да се посочи един пример. Лесно се вижда, че числото $a_1 = 2^{1992!}$ удовлетворява условието на задачата. Тук е важно да отбележим, че числото 1993 е просто.

Пълен брой точки имаха 12 ученици.

Р е ш е н и е н а з а д а ч а 4. Ако α, β и γ са ъглите на търсения триъгълник след пресмятания се стига до следните случаи:

а) $\overset{\frown}{H_BH_A} = 60^\circ$ и тогава $\alpha = 77{,}5^\circ$, $\beta = 27{,}5^\circ$, $\gamma = 75^\circ$;

б) $\overset{\frown}{H_BH_A} = 200^\circ$ и тогава $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 40^\circ$.

В останалите случаи имаме или тъпоъгълен триъгълник, или задачата няма решение.

Самото построение е следното:

1. Построяваме т. C — среда на $\overset{\frown}{H_BH_A}$.
2. Построяваме т. D — диаметрално противоположна на C.
3. От двете страни на W_C построяваме точките A и B, така че $\overset{\frown}{W_CA} = \overset{\frown}{W_CB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DH_B}$.

Пълен брой точки на тази задача имаше само Венцислав Димитров.

МИТКО КУНЧЕВ, Русе, **ЕРИХ ВИНДИШБАХЕР,** Грац, Австрия